Handout bij de workshop “Wortels van Binomen”

Steven Wepster

NWD 2014
Verbeterde versie

1 Historische achtergrond

Klassieke Griekse meetkunde: In de klassieke Griekse meetkunde zoals we die bijvoorbeeld bij Euclides vinden, worden nooit lengtes van lijnstukken uitgedrukt in getallen. Wel bestuderen de Griekse meetkundigen de verhoudingen van lijnstukken tot elkaar, en ook van oppervlakken tot elkaar. Twee lijnstukken kunnen een rechthoek opspannen en zo een oppervlakte voorstellen, en op dezelfde manier kun je ook kijken naar het vierkant “op” een lijnstuk. Tegenwoordig vertalen we dat moeiteloos in rekenkunde of algebra, waarbij we de lengte van twee lijnstukken vermenigvuldigen resp. het kwadraat (letterlijk vierkant!) nemen van een lengte. Ook de verhoudingen van lengten of oppervlakken tot elkaar drukken we makkelijk in getallen uit.

Boek X van de Elementen van Euclides gaat over het soort verhoudingen dat lijnstukken tot elkaar kunnen hebben. Euclides geeft hier een classificatie van, die vrij eenvoudig begint maar al snel heel ingewikkeld wordt. Hieronder staan ter illustratie enkele voorbeelden van begrippen die in Boek X aan de orde komen, met een korte toelichting in meer rekenkundige termen.

- Twee grootheden (zoals lijnstukken, oppervlakken, ...) A en B heten *commensurabel* als een geheel aantal kopieën van A even groot zijn als een geheel aantal kopieën van B. Rekenkundig betekent dit dat de verhouding $A : B$ rationaal is. De zijde en de diagonaal van een vierkant zijn niet commensurabel (de verhouding is $1 : \sqrt{2}$ en $\sqrt{2}$ is geen rationaal getal).

- Lijnstukken A en B heten *potentieel commensurabel* als het vierkant op A commensurabel is met het vierkant op B. Zijde en diagonaal van een vierkant zijn wel potentieel commensurabel omdat de vierkanten op deze lijnstukken zich verhouden als $1 : 2$.

- Een lijnstuk heet *binomiaal* als het bestaat uit twee delen die niet commensurabel maar wel potentieel commensurabel zijn. Rekenkundig opgevat: een lengte 3 en een lengte $\sqrt{2}$ vormen samen een lengte $3+\sqrt{2}$.

- Een lijnstuk heet *apotome* als het ontstaat door van een lijnstuk een deel weg te nemen dat er niet commensurabel maar wel potentieel commensurabel mee is. Rekenkundig opgevat: een lengte 3 waar je een lengte $\sqrt{2}$ van wegneemt, resteert een lengte $3 - \sqrt{2}$.

Op grond van nog enkele andere kenmerken verdeelt Euclides de binomen en apotomen elk in zes subcategorieen.

Sinds de 16e eeuw Simon Stevin heeft de meetkundige classificatie van Euclides deels overgezet in rekenkunde en voorzien van rekenkundige voorbeelden. Stevin noemde Boek X van de Elementen “het kruis der wiskundigen” omdat het zo moeilijk te doorgronden is, maar volgens hem werd het rekenkundig veel duidelijker.

Rekenkundig kunnen we binomen en apotomen aanduiden als getallen $A \pm B$ waarbij A^2 en B^2 rationale getallen zijn en minstens één van A en B irrationaal is. We nemen steeds A als grootste van de twee getallen. De zes subcategorieen van Euclides komen dan voort uit enerzijds of A, B, of geen van beide rationaal zijn, en anderzijds of $\sqrt{A^2 - B^2}$ wel of niet commensurabel is met A. Hier zullen we ons verder niet mee bezighouden.

Voorbeelden van (rekenkundige) binomen zijn: $\sqrt{11}+2$, $9+\sqrt{8}$, $\sqrt{11}+\sqrt{8}$. Vervang je hierin de $+$-tekens door $-$ dan krijg je apotomen. Nonvoorbeelden zijn $\sqrt{99} + \sqrt{11}$, $\sqrt{45} - \sqrt{20}$, $10 + \sqrt{9}$.

Binomen en apotomen zoals bij Euclides meetkundig behandeld, zijn sinds de 16e eeuw grotendeels in vergetelheid geraakt, maar in veel literatuur over rekenkunde kwamen ze nog lang voor. Ze werden bestudeerd o.a. omdat ze opduiken in allerlei meetkundige(!) problemen. Bijvoorbeeld: de verhouding tussen de ribbe van een icosaeder en de diameter van de omgeschreven bol is $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$. Euclides zelf classificeert de verhouding van ribbe en diameter in dit geval als een *minor* maar wij zullen het "eenvoudig" beschouwen als de wortel uit een apotoom.

Opmerking: In het vervolg zullen we binomen en apotomen samen behandelen, waarbij we ze steeds samen aanduiden met de naam binoom. Hiervoor gebruiken we notaties zoals $a \pm \sqrt{b}$.

2 Binomische wortels vereenvoudigen

We vragen ons af of, en zo ja hoe, je de wortel van een binoom kunt vereenvoudigen.

Naïeve methode Schrijf het binoom als $a + \sqrt{b}$. We willen weten of er een binoom $p + \sqrt{q}$ bestaat zo dat $\sqrt{a + \sqrt{b}} = p + \sqrt{q}$.

Opgave 1. Kwadrateer deze vergelijking en leid af dat $a = p^2 + q$, $b = 4p^2q$.

Opgave 2. Vereenvoudig $\sqrt{6 + \sqrt{32}}$.

Het is niet altijd makkelijk om rationale p en q te vinden die hieraan voldoen: in feite vervangen we het oorspronkelijke probleem door het oplossen van een stelsel Diophantische vergelijkingen. Je kunt hiermee wel allerlei waarden voor a en b vinden waarvoor $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ te vereenvoudigen is.

Klassieke methode Schrijf het binoom als $A \pm B$ met $A > B$. Neem C zo dat $C^2 = A^2 - B^2$. Dan geldt

$$\sqrt{A \pm B} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}.$$

Opgave 3. Controleer bovenstaande bewering door te kwadrateren.

Opgave 4. Vereenvoudig $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ en $\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

Opgave 5. Vereenvoudig $\sqrt{54 \pm \sqrt{980}}$.

Eulers methode Weliswaar "werkt" bovenstaande methode voor binomische wortels zoals bijvoorbeeld $\sqrt{\sqrt{12} \pm 3}$, maar je vraagt je af of je het resultaat wilt zien als een vereenvoudiging. Het resultaat is namelijk $\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{3}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$. Het probleem is hier dat $A^2 - B^2 = 12 - 9 = 3$ geen kwadraat van een rationaal getal is.

Euler heeft hiervoor de volgende oplossing gegeven. Noem $A^2(A^2 - B^2) = C^2$ en $A^2 - B^2 = D$. Natuurlijk is D niet rationaal maar misschien C wel. Euler beweert:

$$\sqrt{A \pm B} = \frac{\sqrt{\frac{C+D}{2}} \pm \sqrt{\frac{C-D}{2}}}{\sqrt[4]{D}}.$$

Opgave 6. Controleer door kwadrateren.

Opgave 7. Vind met Eulers methode dat $\sqrt{\sqrt{12} \pm 3} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{\sqrt[4]{12}}$.

3 Hogeremachtswortels: Newton

Nu zijn we toe aan "binomen voor gevorderden"! We gaan op zoek naar de n-demachtswortel van een binoom, naar $\sqrt[n]{A \pm B}$ dus. (Als toepassing hiervan kunnen we denken aan $n = 3$ en de formule van Cardano voor het oplossen van vergelijkingen van de derde graad.) We veronderstellen wederom dat $A > B$. Newton geeft, zonder verklaring of achtergrond, het volgende protocol om de wortel te vereenvoudigen.

1. Zoek het kleinste gehele getal M waarvan de n-de macht M^n deelbaar is door $A^2 - B^2$, en laat $Q = \frac{M^n}{A^2-B^2}$.

2. Neem voor r het kleinste gehele getal dat groter is dan $\sqrt[n]{(A+B)\sqrt{Q}}$.

3. Schrijf $A\sqrt{Q}$ als product van een zo groot mogelijk rationaal getal en een niet te vereenvoudigen wortel; noem die wortel s.

4. Neem voor t het gehele getal dat het dichtst ligt bij $\dfrac{r + M/r}{2s}$.

5. De oplossing is $\sqrt[n]{A \pm B} = \dfrac{ts \pm \sqrt{t^2s^2 - M}}{\sqrt[2n]{Q}}$.

Voorbeeld: we berekenen $\sqrt[3]{68 - \sqrt{4374}}$.

1. $A^2 - B^2 = 4624 - 4374 = 250 = 2 \cdot 5^3$, we kiezen $M = 10$ en $Q = 4$.

2. $\sqrt{4374} \approx 66.1$, en $\sqrt[3]{2 \cdot (68+66)} = \sqrt[3]{268} \approx 6.4$ dus $r = 7$.

3. $A\sqrt{Q} = 68 \cdot 2 = 136\sqrt{1}$ dus $s = 1$. (Ter illustratie: ware $A\sqrt{Q} = \sqrt{8}$ dan zou $s = \sqrt{2}$).

4. $\frac{7+10/7}{2} = 3\frac{1}{2} + \frac{5}{7}$, neem $t = 4$.

5. Antwoord $\dfrac{4 \cdot 1 - \sqrt{16-10}}{\sqrt[6]{4}} = \dfrac{4-\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$.

Opgave 8. Met dezelfde methode kun je uitrekenen dat $\sqrt[3]{\sqrt{968}+25} = 1 + 2\sqrt{2}$.

Newton geeft een aantal verschillende voorbeelden bij zijn methode, ook voor bijv. $n = 5$. Al zijn voorbeelden kloppen. Maar Euler laat in 1740 zien dat Newtons methode niet klopt voor $\sqrt[5]{5\sqrt{5}+11}$.

Opgave 9. Ga door machtsverheffen na dat $\sqrt[5]{5\sqrt{5}+11} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[5]{16}}$.

Opgave 10. Ga na dat Newtons methode geeft $\sqrt[5]{5\sqrt{5}+11} = \dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{8}}{\sqrt[10]{8}}$. Dit is overduidelijk een numeriek veel groter antwoord dan we in de vorige opgave hebben gezien, en dus fout!

Na dit tegenvoorbeeld merkt Euler op dat Newtons methode zelfs *meestal* een verkeerd antwoord geeft. Dat roept bij mij de vraag op of Newton dat dan zelf niet geweten heeft, en hoe hij zijn (correcte) voorbeelden gevonden heeft. Terzijde: Euler maakt een tekenfout bij het lezen en interpreteren van Newton, waardoor hij als antwoord van de laatste opgave $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{12}}{\sqrt[10]{8}}$ heeft, maar dat doet er verder niet toe.

4 Hogeremachtswortels: Euler

Nadat Euler de foute resultaten van Newtons protocol heeft aangetoond, geeft hij zijn eigen versie hoe het dan wel moet. Hieronder geven we de typisch Eulerse afleiding weer, waarbij we en passant enig zicht krijgen op wat Newton voor ogen moet hebben gestaan. We laten de details als oefening.

Het doel is om, indien mogelijk, $\sqrt[n]{A \pm B}$ te vereenvoudigen. Behalve de gebruikelijke $A > B$ vereisen we ook nog dat A en B “breukvrij” zijn, wat we verduidelijken met een voorbeeld: het binoom $\frac{3}{4}\sqrt{2} + \frac{2}{7}\sqrt{3}$ is niet breukvrij, maar je kunt een gemeenschappelijke noemer buiten haakjes halen zodat je krijgt $\frac{1}{28}(21\sqrt{2} + 8\sqrt{3})$. Alleen het deel tussen haakjes hoef je te vereenvoudigen bij het worteltrekken. Merk op dat als A en B breukvrij zijn en $A + B$ is een binoom, dan is $A^2 - B^2$ geheel.

De vereenvoudiging die we zoeken heeft de vorm

$$\sqrt[n]{A \pm B} = \frac{x \pm y}{\sqrt[2n]{p}}$$

waarin we x, y en p nog moeten vinden; $x \pm y$ is opnieuw een binoom. De noemer lijkt misschien wat vreemd, maar dat zal snel duidelijk worden. Het ligt voor de hand dat de $\pm$ zowel links als rechts ofwel $+$, ofwel $-$ is. Vermenigvuldig beide mogelijkheden met elkaar, dit geeft

$$\sqrt[n]{A^2 - B^2} = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt[n]{p}},$$

oftewel

$$x^2 - y^2 = \sqrt[n]{(A^2 - B^2)p}. \tag{1}$$

Aangezien $x + y$ een binoom is, is $x^2 - y^2$ rationaal, en dus moet $(A^2 - B^2)p$ de n-de macht van een rationaal getal zijn: laten we dat getal r noemen. Maar $A^2 - B^2$ is geheel! Daarom kunnen we gehele getallen p en r kiezen zo dat $(A^2 - B^2)p = r^n$; vergelijking (1) luidt dan $x^2 - y^2 = r$.

Nu willen we ook $x^2 + y^2$ vinden. Hiertoe merken we op dat

$$(\sqrt[n]{A + B})^2 + (\sqrt[n]{A - B})^2 = \frac{(x + y)^2 + (x - y)^2}{\sqrt[n]{p}},$$

waaruit we verkrijgen

$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{(A + B)^2 p} + \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{(A - B)^2 p}.$$

Links staat het gehele getal $x^2 + y^2$, rechts de som van twee wortels. Dit betekent dat de fracties "achter de komma" van de twee wortelgetallen samen geheel moeten zijn. We kunnen dus volstaan met benaderingen in gehele getallen s en t zodanig dat

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{(A + B)^2 p} &= s \pm \text{een of andere fractie},\\ \sqrt[n]{(A - B)^2 p} &= t \mp \text{dezelfde fractie}.\end{aligned}$$

Immers, dan is $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(s + t)$, en samen met vergelijking (1) krijgen we

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{s + t + 2r}{4},\\ y^2 &= \frac{s + t - 2r}{4}.\end{aligned}$$

Merk nog op dat we de afzonderlijke getallen s en t niet nodig hebben, alleen hun som! Zodoende hebben we dan de vereenvoudiging gevonden:

$$\sqrt[n]{A \pm B} = \frac{\sqrt{s + t + 2r} \pm \sqrt{s + t - 2r}}{2\sqrt[2n]{p}}.$$

Opgave 11. Vul waar nodig details aan.

Opgave 12. Gebruik Eulers methode om $\sqrt[5]{5\sqrt{5} + 11}$ te vereenvoudigen.

Opgave 13. Probeer ook $\sqrt[7]{139\sqrt{3}+91\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt[7]{64}}$.

Daarna gaat Euler pas echt los, met het vereenvoudigen van binomen door middel van wortels van (complexe) veeltermen, maar dat laten we voor een volgende workshop. . . .

5 Bibliografie

E.J. Dijksterhuis, *De Elementen van Euclides*, deel 2, Groningen 1930.

L. Euler, De extractione radicum ex quantitatibus irrationalibus, in: *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* **13** (1751), p. 16–60. Herderukt in Opera Omnia: Series 1, Volume 6, p. 31–77. Eneström index E157.

I. Newton en J. Raphson, *Universal Arithmetick: or, a treatise of Arithmetical Composition and Resolution*, 1720 (dit boek is Raphsons Engelse vertaling van een bewerking van Newtons oorspronkelijke lecture notes).

C.E. Sandifer, *The Early Mathematics of Leonhard Euler*, hst. 46, Washington 2007.

S. Stevin, *L'arithmétique, contenant les computations des nombres arithmétiques ou vulgaires; ensemble les quatre premiers livres d'Algèbre de Diophante d'Alexandrie, maintenant premièrement traduicts en françois; encore un livre particulier de la Pratique d'arithmétique . . . un traicté des incommensurables grandeurs: avec l'explication du dixiesme livre d'Euclide*, Leiden 1585.