motivatie voor complexe getallen $\mathbb{C}$

1545 Cardano (Tartaglia):

De vgl. $x^3+px+q=0$ heeft oplossing

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

(geen collestof)

Voorbeeld: $x^3+6x-20=0$ $\quad p=6 \quad q=-20$

$\frac{p}{3}=2 \quad \frac{q}{2}=-10$

Invullen

$$x=\sqrt[3]{+10+\sqrt{100+8}}+\sqrt[3]{+10-\sqrt{108}}=2$$

Maar: $x=2$: $\quad 2^3+6\cdot 2-20=0.$

Merk op $(1+\sqrt{3})^3=1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}=10+6\sqrt{3}=10+\sqrt{108}$

$(1-\sqrt{3})^3=1-3\sqrt{3}+9-3\sqrt{3}=10-6\sqrt{3}=10-\sqrt{108}$

20

$$x=\sqrt[3]{(1+\sqrt{3})^3}+\sqrt[3]{(1-\sqrt{3})^3}$$

$$=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2.$$

Voorbeeld $x^3 - 15x - 4 = 0$ $\frac{p}{3} = -5$ $\frac{q}{2} = -2$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4-125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4-125}}$$

$$= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4$$

Want $(2+\sqrt{-1})^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}$ $= 2 + \sqrt{-121}$

$(2-\sqrt{-1})^3 = 8 - 12\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1} = \underline{2 - 11\sqrt{-1}}$ $2 - \sqrt{-121}$

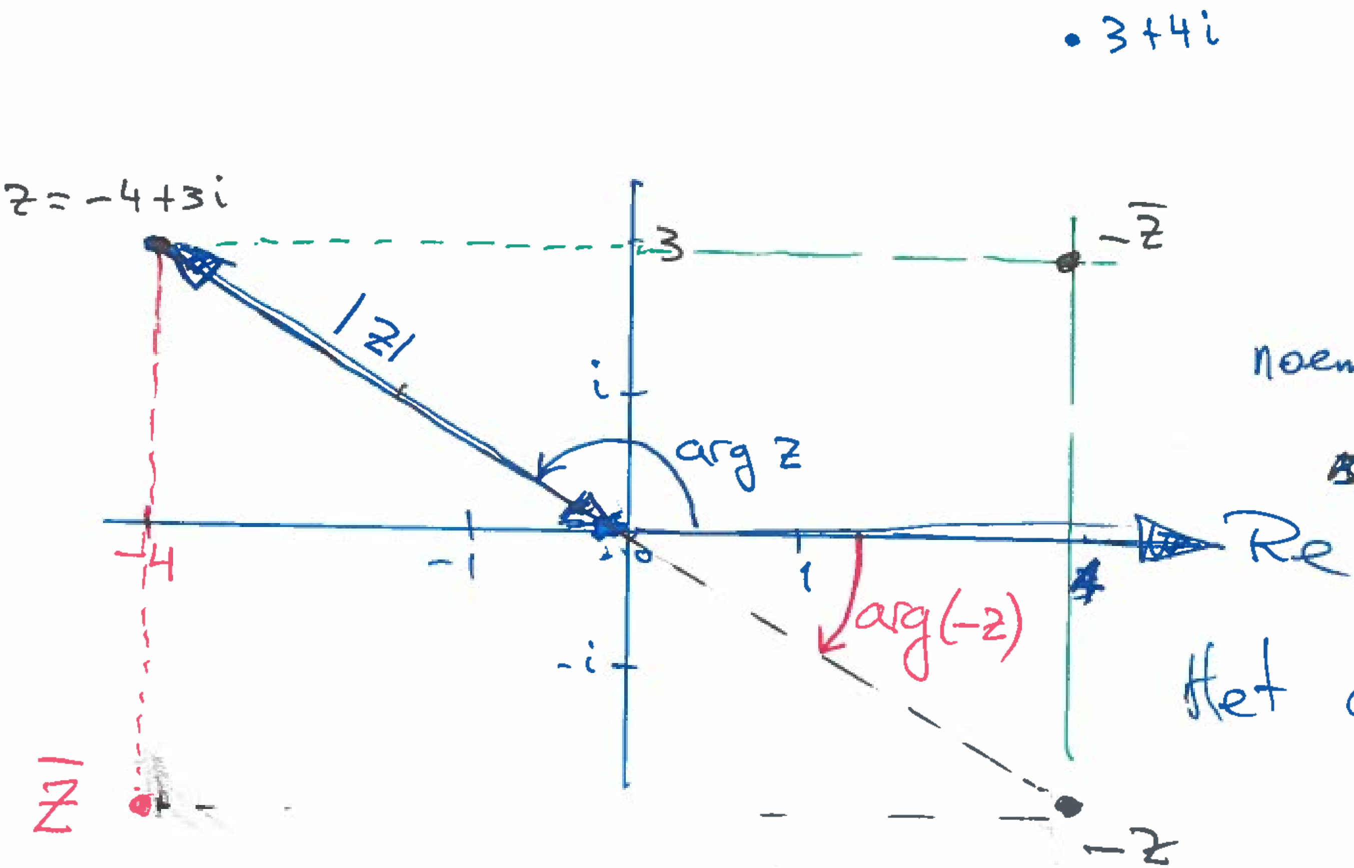
Necessity is the mother of invention.

Vanaf hier weer Collegestof.

We introduceren dus een nieuw getal i met eigenschap $i^2 = -1$

Daarmee: samengestelde getallen $a + bi$ (voorb: $3 - 7i$, $4 + 8i$, $\sqrt{2} - \sqrt{\pi}\, i$ etc

samengestelde = complex



$Re(z) = -4$

$Im(z) = 3$

$\bar{z} = -4-3i$

$-z = +4-3i$

$-\bar{z} = +4+3i$

$|z| = \sqrt{3^2+4^2}$

noem $\arg z = \varphi$, dan $\tan\varphi = \dfrac{Im\, z}{Re\, z}$

MAP

Het complexe vlak.

Webwork: als er staat Arg dan is de Hoofdwaarde bedoeld

$-\pi < \text{Arg } z \leq +\pi$

Maak altijd plaatje.

rechthoeknotatie

$z = x + iy$

poolnotatie

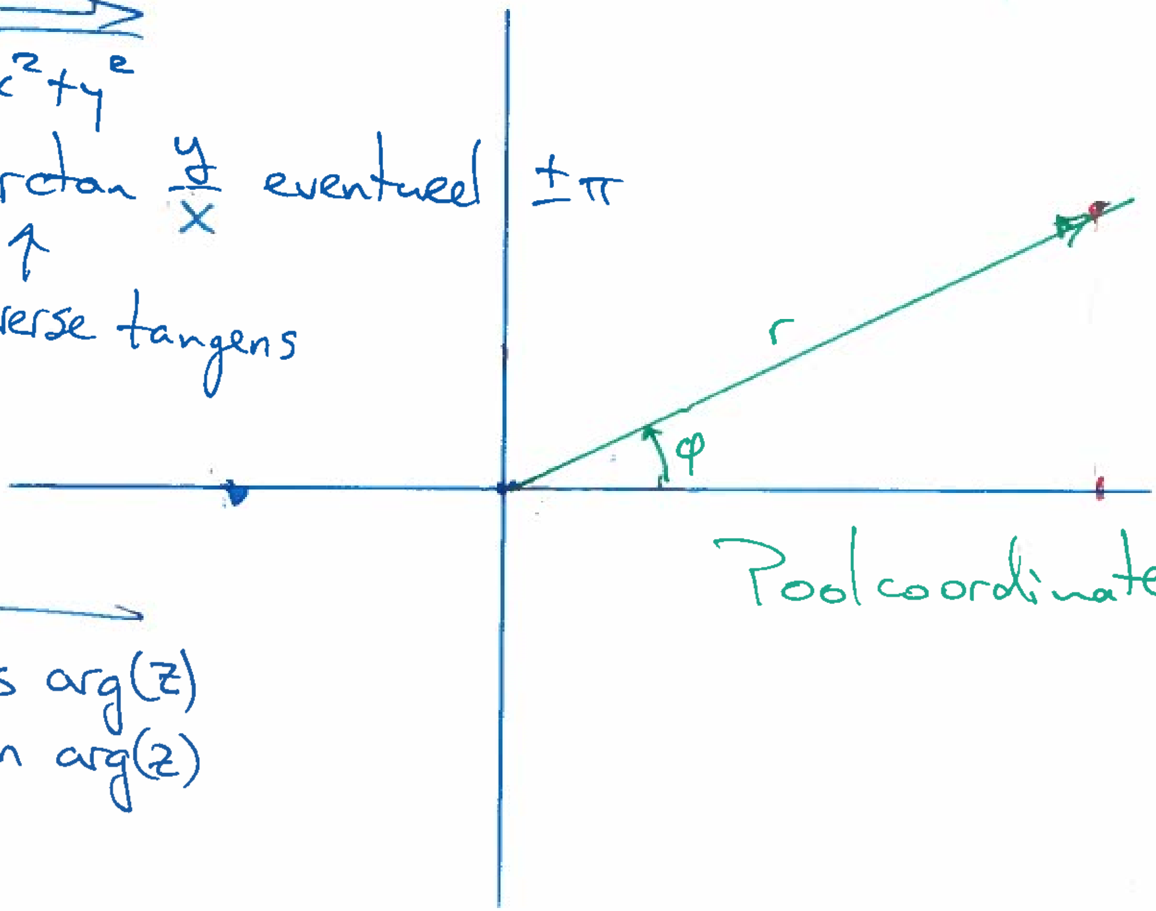
z heeft modulus $|z| \longleftrightarrow r$

argument $\arg z \longleftrightarrow \varphi$

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\arg z = \arctan \frac{y}{x} \text{ eventueel } \pm\pi$$

inverse tangens



Poolcoordinaten r, φ

$$x = |z| \cos \arg(z)$$

$$y = |z| \sin \arg(z)$$

Rekenen

$$z = a+bi$$
$$w = x+yi$$
$$+$$
$$(a+x)+(b+y)i$$

$$zw = (a+bi)(x+yi)$$
$$= ax - by + (ay+bx)i$$

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{x+yi} \cdot \frac{x-yi}{x-yi} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$$

$$\underbrace{(x+yi)}_{w}\underbrace{(x-yi)}_{\bar{w}} = x^2 \cancel{+xyi} \cancel{-xyi} + y^2 = |w|^2$$

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \text{met} \quad \varphi = \arg z$$
$$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) \qquad\qquad \psi = \arg w$$

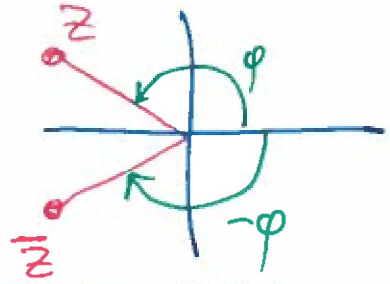
$$zw = |z||w|\left(\cos\varphi\cos\psi + (\cos\varphi)(i\sin\psi) + i\sin\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\right)$$
$$= |z||w|\left(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + (\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)i\right)$$
$$= |z||w|\left(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\right)$$

Betekenis:

$|zw| = |z||w|$ en $\arg(zw) = \arg z + \arg w$

Vermenigvuldigen en delen gaan supermakkelijk in poolnotatie

Optellen/aftrekken in rechthoeknotatie.



Neem $z = x + iy$ Wat is dan e^{x+iy} ?

Hoop: $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$? Kunnen we hier betekenis aan geven?

Noem $f(y) = e^{iy}$

Wil graag: $f(0) = e^{i \cdot 0} = e^0 = 1$

en : $f'(y) = \frac{d}{dy} e^{iy} = ie^{iy} = if(y)$

$\cos 0 + i \sin 0 = 1$

$(\cos y + i \sin y)' = -\sin y + i \cos y$

$$f''(y) = -f(y)$$

$$f'''(y) = -i f(y)$$

$$f^{iv}(y) = f(y)$$

Sinus?
cosinus?

Wil ook nog:

$$f(a+b) = e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib} = f(a) f(b)$$

Als we definieren: $e^{iy} = \cos y + i \sin y$

dan zijn al onze wensen vervuld.