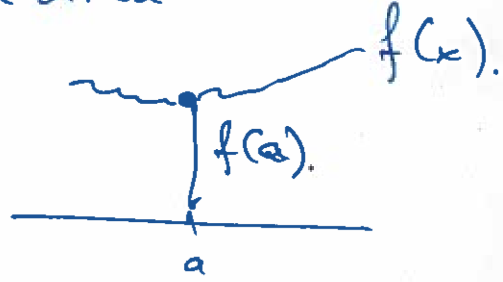
Continuïteit en differentieerbaarheid.

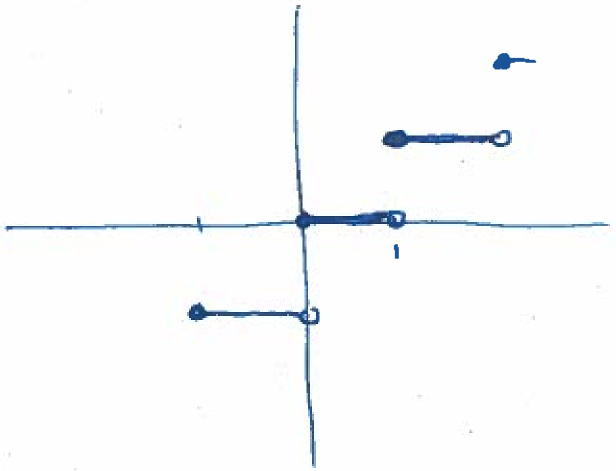
§1.4. Defn. 1) Een functie f heet continu in a indien
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$



2). f heet continu op interval (of hele domein) indien f continu is in elk punt van interval (domein)

3). Een fie die continu is op het hele domein noemen we kortweg continu.

Vb. Floor-functie $\lfloor x \rfloor$ "afronden naar beneden op geheLen"



continu behalve in $x \in \mathbb{Z}$

Merk op: als a in $\mathbb{Z}$ dan
$\lim_{x \to a^+} \lfloor x \rfloor = a = \lfloor a \rfloor$ Deze fie noemen we rechts-continu.

Maar $\lim_{x \to a^-} \lfloor x \rfloor = a-1. \neq \lfloor a \rfloor$

Behoud van continuïteit

Stel f, g continu. Dan ook $f \pm g$, fg, $\frac{f}{g}$ mits $g(x) \neq 0$, en $\sqrt[n]{f}$ allemaal continu.

Samenstellen: $f \circ g(x) = f(g(x))$ is continu in x mits

- g continu in x
- als $y = g(x)$, f continu in y.
- $f \circ g$ moet gedefinieerd zijn in een open interval om x.

Twee stellingen (algemene ontwikkeling)

1) Max-min stelling: een fie die continu is op gesloten interval bereikt op dat interval een maximum en een minimum.

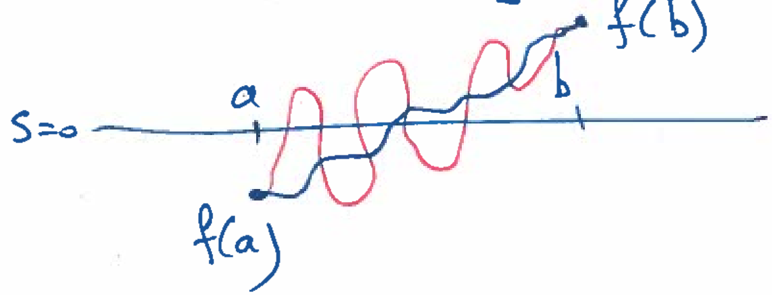
Vb. $f(x) = \frac{1}{x}$ Interval $[0,1]$ hier heeft f wel minimum
geen maximum.
$(0,1)$ wel continu geen min, geen max.
$[\frac{1}{1000}, 1]$ wel continu, minimum en maximum worden aangenomen op interval

Vb. $f(x) = 1$ voor alle x
op interval $[0,1]$
Hier is f continu.
$\rightarrow$ Stelling: f neemt minimum en maximum aan (in ten minste 1 punt van $[0,1]$)

Vb. $f(x) = \frac{1}{x}$: op $[-1,1]$ is f niet continu, dus stelling niet bruikbaar.

2) Tussenwaardestelling

Als f continu op $[a,b]$ en s is een getal tussen $f(a)$ en $f(b)$ [dwz $f(a) \leq s \leq f(b)$ of $f(b) \leq s \leq f(a)$]
dan zit s in het bereik van f op $[a,b]$
dit betekent: er bestaat een $c \in [a,b]$ waarvoor $f(c) = s$.



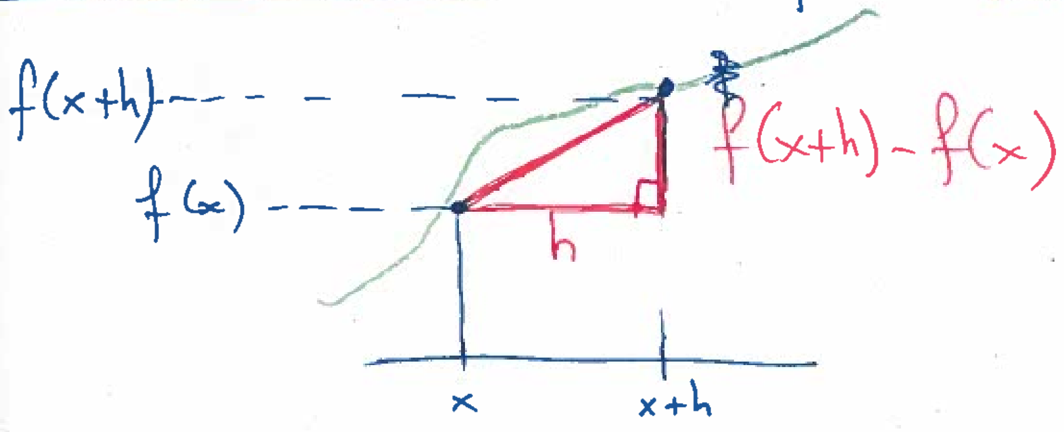
Vb. $f(x) = x - \cos x$

$f(0) = -1 < 0$

$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0$

f is continu op $[0, \frac{\pi}{2}]$ dus er zit een nulpunt tussen 0 en $\frac{\pi}{2}$.

Hst 2: Differentiëren (kijken naar verandering)



Schuine zijde heeft helling

differentie quotient → $\boxed{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}}$

Als $h \to 0$ dan gaat het diff. quotient → helling vd raaklijn (als ~~ze~~ die bestaat)

Def. We zeggen dat f diffbaar is in x indien $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ bestaat.

In dat geval noemen we die limietwaarde $f'(x)$

Een functie f heet diffbaar op interval/domein indien f diffbaar in elk punt van interval/domein.

Opmerkingen over boek lezen:

Notaties zie p.104 onder + 105: worden allemaal gebruikt

Evaluatiesymbool:

Vergelijk: $\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$

$\frac{d}{dx} f(3) = 0$ want $f(3)$ is een constante.

$\frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=3} = f'(3)$

evaluatiesymbool (evalueer in $x=3$)

§2.2 TOT p.106 Differentials.

§2.3 Rekenregels + §2.4 Kettingregel al bekend.

wordt(te) vaak vergeten!

Voorbeeld.

$f(x) = \sqrt{x}$ met $x > 0$

Diff: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \dfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \dfrac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

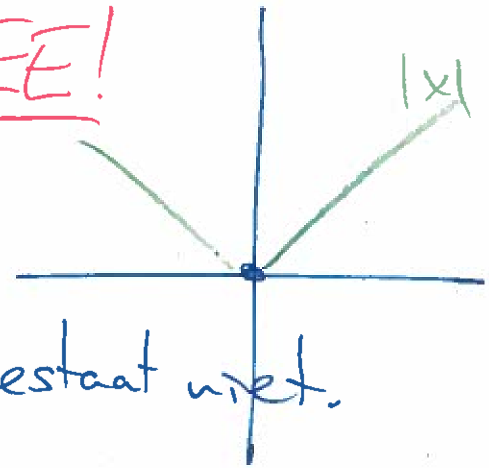
$$= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

Dus de limiet:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Conclusie: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Voorbeeld: Is $f(x) = |x|$ diffbaar in $x = 0$? NEE!



$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & \text{als } h > 0 \\ -1, & \text{als } h < 0. \end{cases}$$

dus $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} \neq \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ dus $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ bestaat niet.

§2.5 afgeleide $\underset{\text{bekend}}{\underline{\sin, \cos}}$, tan.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{diff: } \tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

KEUZE

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\tan' x = \boxed{1 + \tan^2 x}$$

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$$