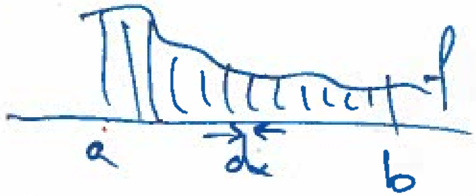
'Grote O' dit jaar niet.

§5.5. Hoofdstelling vd integraalrekening.

Zij f integreerbaar dan hebben

- een primitieve van f is een fie F en eigenschap $F'(x) = f(x)$
- de onbep. integraal $\boxed{\int f(x)\,dx}$ "alle" primitieven afgezien van integratie const.
- bepaalde integraal $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$ is een getal



Hoofdstelling. Zij f een cont fie.

1. $\boxed{\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = f(x)}$ —— t is een lokale variabele

2. als F een primitieve van f dan
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ξ $\equiv$

Achtergrond:

beschouw fie $H(x) = \int_a^x f(\xi)\, d\xi$

$$H'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{H(x+h) - H(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(\xi)\, d\xi - \int_a^x f(\xi)\, d\xi \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \boxed{\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(\xi)\, d\xi}$$

[formeel nu middel.w.stelling]
[hebben we niet]

Inzichtelijk: $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(\xi) d\xi$ is het gemiddelde van f

op het interval $(x, x+h)$ met $h \to 0$

Dit gemiddelde is $f(x)$.

Dus $H'(x) = f(x) \longrightarrow$ geeft 1.

Voor 2. opmerken dat H blijkbaar een prim. is. van f.

§5.6 Integreren met substitutie

Twee fies f en u

Kettingregel: $\frac{d}{dx} f(u(x)) = \frac{df(u)}{du} \frac{du}{dx}$

Integreer over x:

$$f(u(x)) = \int \frac{d}{dx} f(u(x))\, dx = \int \frac{d f(u)}{du} \frac{du}{\cancel{dx}}\, \cancel{dx}$$

$$= \int f'(u)\, u'(x)\, dx$$

$$= \int f'(u)\, du$$

Integreren m.b.v. substitutie komt neer op het kiezen van een slimme u

Voorbeeld

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

Kies subs. $u = \cos x$

$du = -\sin x\, dx$

Invullen:

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = \int \frac{-du}{u} = -\log|u| + c = -\log|\cos x| + c$$

$$= \log \frac{1}{|\cos x|} + c$$

Vb: $\int e^{ax}\,dx$ subs. $u = ax$, dan $du = a\,dx$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\int e^u\,du = \frac{1}{a}e^u + c = \frac{1}{a}e^{ax} + c.$$

Vb met grenzen $\int_0^8 \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx$

OPTIE 1: grenzen weglaten tot na terugsubs.

Kies sub $u = \sqrt{x+1}$, $du = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}}$ invullen:

$$\int \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\int \cos u\,du = 2\sin u \cancel{+c} = 2\sin\sqrt{x+1} \cancel{+c}$$

niet interessant

Dus $$\int_0^8 \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\sin\sqrt{x+1}\Big|_{x=0}^{x=8} = 2(\sin 3 - \sin 1)$$

OPTIE 2: grenzen meesubstitueren

als $x=0$ dan $u=\sqrt{1}=1$ en als $x=8$ dan $u=\sqrt{9}=3$.

dus $$\int_0^8 \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\int_1^3 \cos u\,du = 2(\sin 3 - \sin 1)$$

Standaardintegralen

Weten: p 152 kader (a) – (h)

p. 320 $\begin{pmatrix} \text{nrs 1 t/m 10} \\ \text{nrs. 15 t/m 18} \end{pmatrix}$ met $a = 1$.

Bijv. $\int \sin(ax)\,dx$ niet uit je hoofd

Wel: $\int \sin x\,dx$

dus $u = ax$ $\quad \int \sin(ax)\,dx = \frac{1}{a}\int \sin u\,du$

$du = a\,dx$

$$= -\frac{1}{a}\cos u + c$$

$$= -\frac{1}{a}\cos(ax) + c.$$

Alle gevallen met $a \neq 1$ zelf afleiden met subs.