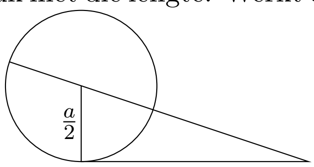
**Huiswerkopgaven bij §16 Descartes** **GvdW maart 2018**

1. Descartes vindt dat je meetkundige problemen op een meetkundige manier moet oplossen. De algebra ziet hij daarbij slechts als een hulpmiddel. Dit betekent dat een algebraische "oplossing" niet volstaat: deze moet eerst weer terugvertaald worden in een meetkundige constructie.

   Stel dat een meetkundig probleem heeft geleid tot een van de vergelijkingen $z^2 = az + b^2$ of $z^2 + az = b^2$ (bij Descartes zijn constanten zoals $a$, $b$ altijd positief).

   Vind de positieve oplossing van deze vergelijkingen, en geef een constructie voor een lijnstuk met die lengte. Werkt deze constructie in alle gevallen of zijn er beperkingen?

   Hint: 


2. Zie bijgaande vertaling uit de Géométrie (bron: W.W. Wilhelm, *Meetkunde*). Lees eerst de tekst. De lijn $KC$ wordt naar twee kanten verlengd zo ver als nodig.

   (a) Onderzoek welke kromme het instrument produceert als hoek $NKL$ recht is.

   Nu vervangen we het vlak $CNKL$ door een cirkel met middelpunt $L$ en straal $KL = b$. De rest blijft hetzelfde, in het bijzonder scharniert de lineaal $GL$ nog steeds om punt $L$.

   (b) Geef een vergelijking van de kromme die dit instrument tekent. Is de kromme algebraïsch en zo ja, wat is de graad?

   (c) Geef de naam van deze kromme (hint: staat ergens in het diktaat).

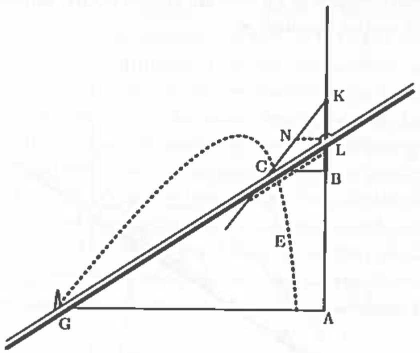
## Hints bij opg. 17.3

a. Ontbind $T$ in vertikale en horizontale componenten. De linkerhelft van de ketting oefent spankracht $T_0$ uit. Het kettingsegment tussen de pijlen $T_0$ en $T$ heeft lengte $s$ en ondervindt vertikale zwaartekracht. Wat is de helling van pijl $T$?

c. Dwz wat is de meetkundige betekenis van het resultaat dat je bij b gevonden hebt?

d. Dit gaat over de constructie van (het assenstelsel en) de oorsprong. De vraag is: waarom moeten we het vertikale stukje tussen de ketting en de oorsprong inderdaad 1 stellen? Gebruik c.

Als ik zo wil weten van welke soort de kromme E C is, die ik denk beschreven te zijn door het snijpunt van de liniaal G L en het rechtlijnig vlak C N K L, waarvan de zijde K N onbe-
320 perkt is verlengd in de richting van C, en die over het vlak eronder in een rechte lijn wordt bewogen, dat wil zeggen, op zo'n manier dat de afstand K L steeds langs een deel valt van de rechte B A die aan weerskanten is verlengd, en zo de liniaal G L rond het punt G doet bewegen, omdat deze zo verbonden is met dat vlak dat die steeds door het punt L gaat. Dan kies ik een rechte, zoals A B om hiervan verschillende punten in relatie te brengen met al die punten van de kromme E C, en op die lijn A B kies ik een punt, zoals A, om daarbij de berekening te beginnen. Ik zeg dat ik beide kies, omdat men vrij is ze te nemen zo men wil. Want hoewel er veel keus is om de vergelijking korter en eenvoudiger te maken is het steeds zo dat, hoe men ze ook neemt, men altijd kan zorgen dat de kromme van dezelfde soort is, wat
321 eenvoudig is aan te tonen.




Daarna, terwijl ik een willekeurig punt C van de kromme neem, waarop ik onderstel dat het instrument dat dient om





de kromme te beschrijven is terecht gekomen, trek ik vanuit dit punt C de rechte C B evenwijdig aan G A, en omdat C B en B A twee onbepaalde en onbekende grootheden zijn, noem ik de een $y$ en de ander $x$. Maar om tenslotte de relatie te bepalen tussen de een en de ander beschouw ik ook de bekende grootheden die de beschrijving van de kromme bepalen, zoals G A die ik $a$ noem, K L die ik $b$ noem en N L, evenwijdig aan G A, die ik $c$ noem. Vervolgens zeg ik: zoals N L staat tot L K, of $c$:$b$, zo verhoudt zich C B, of $y$, tot B K, die daardoor gelijk is aan $\frac{b}{c}y$ zodat B L $= \frac{b}{c}y - b$, en A L $= x + \frac{b}{c}y - b$. Vervolgens: zoals C B staat tot L B, of $y$ staat tot $\frac{b}{c}y - b$, zo verhoudt zich $a$, of G A tot L A of
$x + \frac{b}{c}y - b$. Door de tweede met de derde te vermenigvul- 322
digen krijgt men $\frac{ab}{c}y - ab$, wat gelijk is aan $xy + \frac{b}{c}y^2 - by$, wat het resultaat is van de vermenigvuldiging van de eerste met de laatste. Daarom is de vergelijking die gevonden moest worden:

$$y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac,$$

aan welke men herkent dat de kromme E C van de eerste soort is, omdat zij immers niets anders is dan een hyperbool.

Als men bij het instrument om de kromme te beschrijven die hyperbool gebruikt in plaats van de rechte C N K, of een andere kromme van de eerste soort die het vlak C N K L bepaalt zal het snijpunt van die kromme en de liniaal G L in plaats van de hyperbool C E een andere kromme beschrijven die van de tweede soort zal zijn. Als C N K een cirkel is, waarvan L het middelpunt is zal men de eerste conchoïde van de klassieken beschrijven, en als het een parabool is waarvan K B de diameter is, zal men de kromme beschrijven, waarvan ik eerder heb gezegd dat het de eerste en eenvoudigste was van het vraagstuk van Pappus als er niet meer dan vijf rechten zijn gegeven door hun ligging. Maar