Leibniz en de Hoofdstelling van de Analyse

Steven Wepster

Departement Wiskunde
Universiteit Utrecht

10 maart 2016

Hoofdstelling vd Analyse

Hoofdstelling vd Analyse

Zij f continu in een omgeving I van a, en laat $b, x \in I$. Dan:

- $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$, en
- als F een primitieve van f dan $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$.

Context

- 17e eeuw: meetkunde van *krommen*
- Typische problemen gaan over:
  - rectificatie: booglengte van de kromme
  - tangenten (raaklijnen)
  - quadratuur (oppervlakte)
  - omgekeerd probleem:
    vind een kromme waarvan de raaklijnen gegeven zijn.
- Veel werk gedaan: Fermat, Descartes, Cavalieri, Toricelli, Roberval, Huygens . . .

Newton, Leibniz als grondleggers van de calculus

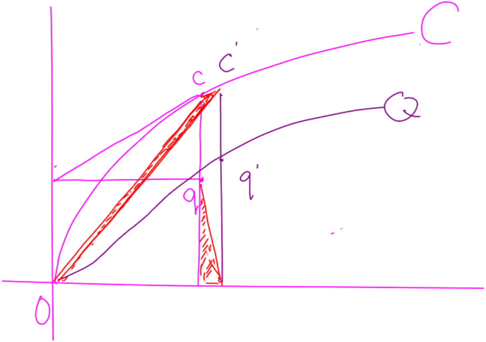
Waarom? Omdat zij:

- algemene methoden hebben die voor alle krommen werken;
- de “hoofdstelling” herkennen, dwz dat tangenten en quadraturen keerzijde van dezelfde medaille zijn;
- hun technieken voorzien van effectieve nieuwe notaties.

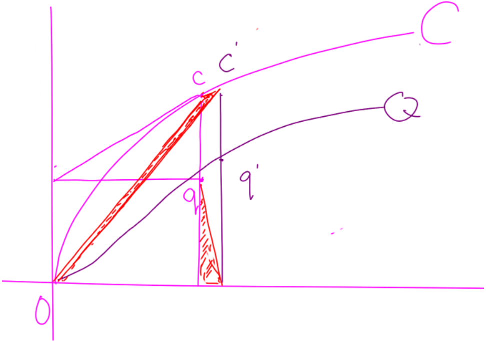
Kernideeën bij Leibniz

- transformatieregels voor oppervlakken
- rijen, somrijen en verschilrijen en hun onderlinge relaties
- *Characteristica generalis*: zoeken naar symbolentaal waarin je redeneringen kunt maken mbv rekenregels op de symbolen

Transformatie van oppervlakken

- Kromme $Occ'C$ is gegeven.
- 

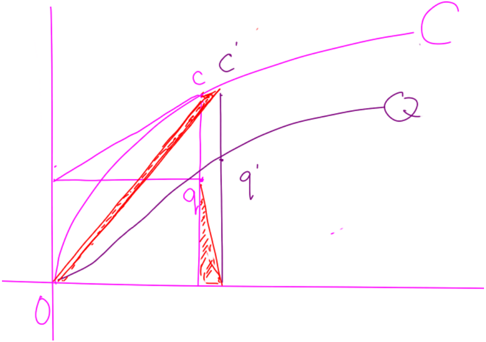
Transformatie van oppervlakken

- Kromme $Occ'C$ is gegeven.
- Kromme $Oqq'Q$ is geconstrueerd mbv raaklijnen.
- 

Transformatie van oppervlakken

- Kromme $Occ'C$ is gegeven.
- Kromme $Oqq'Q$ is geconstrueerd mbv raaklijnen.
- $\triangle Occ' = \frac{1}{2} bb' \cdot bq$, en dus

$$\text{Opp. } OcCB = \text{Opp. } OqQB + \triangle OCB.$$

- 

Transformatie II

- Moraal: opp onder een kromme vervangen door opp onder andere kromme, mbv raaklijnen.
- Is dit algemener te maken?

Rijen, somrijen, verschilrijen

- Beschouw rij $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

Rijen, somrijen, verschilrijen

- Beschouw rij $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$
- Termsgewijs optellen:
  $s_1, s_2, s_3, s_4 \ldots$ met $s_1 = a_1$ en $s_n = a_n + s_{n-1}$.

Rijen, somrijen, verschilrijen

- Beschouw rij $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$
- Termsgewijs optellen:
  $s_1, s_2, s_3, s_4 \ldots$ met $s_1 = a_1$ en $s_n = a_n + s_{n-1}$.
- Termsgewijs aftrekken:
  $d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots$ met $d_n = a_{n+1} - a_n$.

Rijen, somrijen, verschilrijen

- Beschouw rij $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$
- Termsgewijs optellen:
  $s_1, s_2, s_3, s_4 \ldots$ met $s_1 = a_1$ en $s_n = a_n + s_{n-1}$.
- Termsgewijs aftrekken:
  $d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots$ met $d_n = a_{n+1} - a_n$.
- De reeks (a_n) met som-operatie geeft (s_n),
  met verschil-operatie geeft (d_n).

Rijen, somrijen, verschilrijen

- Beschouw rij $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$
- Termsgewijs optellen:
  $s_1, s_2, s_3, s_4 \ldots$ met $s_1 = a_1$ en $s_n = a_n + s_{n-1}$.
- Termsgewijs aftrekken:
  $d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots$ met $d_n = a_{n+1} - a_n$.
- De reeks (a_n) met som-operatie geeft (s_n),
  met verschil-operatie geeft (d_n).
- De som-operatie op (d_n) geeft (a_n).
- De verschil-operatie op (s_n) geeft (a_n).
- Concludeer dat som- en verschiloperatie elkaars inversen zijn.

Rijen, somrijen, verschilrijen

- Beschouw rij $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$
- Termsgewijs optellen:
  $s_1, s_2, s_3, s_4 \ldots$ met $s_1 = a_1$ en $s_n = a_n + s_{n-1}$.
- Termsgewijs aftrekken:
  $d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots$ met $d_n = a_{n+1} - a_n$.
- De reeks (a_n) met som-operatie geeft (s_n),
  met verschil-operatie geeft (d_n).
- De som-operatie op (d_n) geeft (a_n).
- De verschil-operatie op (s_n) geeft (a_n).
- Concludeer dat som- en verschiloperatie elkaars inversen zijn.
- Notaties: $\int$ voor som-operatie, d voor verschil.

Grondslag van de calculus

Uit een manuscript van Leibniz:

> *Grondslag van de calculus: verschillen en sommen zijn aan elkaar reciprook, dwz: de som van de differenties van een rij is de term van de rij, en het verschil van de sommen van de rij is ook de term van de rij. De eerste schrijf ik zo: $\int dx$ aequ. x, de laatste zo: $d \int x$ aeq. x.*

Voorbeeld

- Beschouw de rij

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{21}, \ldots,$$

alg. vorm $\frac{2}{n(n+1)}$. Wat is de som van de termen?

Voorbeeld

- Beschouw de rij
$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{21}, \ldots,$$
alg. vorm $\frac{2}{n(n+1)}$. Wat is de som van de termen?
- Merk op: dit is de verschilrij van
$$\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \ldots,$$
immers $\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)}$.

Voorbeeld

- Beschouw de rij
$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{21}, \dots,$$
alg. vorm $\frac{2}{n(n+1)}$. Wat is de som van de termen?
- Merk op: dit is de verschilrij van
$$\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \dots,$$
immers $\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)}$.
- Dus
$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} \dots \\ =&\left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{2}{4} - \frac{2}{5}\right) + \cdots = 2 \end{aligned}$$

Toepassen op krommen

Deel kromme op in eindig veel rechte stukjes, elk met abscis x_n en ordinaat y_n.

Helling van "raaklijn"	$\leftrightarrow$	differenties dy, dx delen
Quadratuur	$\leftrightarrow$	$y\,dx$ of $x\,dy$ sommeren
Booglengte	$\leftrightarrow$	$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ sommeren

Dit is exact als je een oneindig aantal stukjes neemt.

Verschillen toen – nu

	Leibniz	**wij**
Basisconcept	variabele	functie
	opeenvolgende waarden	in continuum
	x, y gelijkwaardig	$y = f(x)$
differentiëren	$x \to dx$, $y \to dy$	$f(x) \to f'(x) = \frac{df}{dx}$
	dx, dy infinitesimale var.	differentiaal-1-vorm
sommeren	$x \to \int x$, $x\,dy \to \int x\,dy$	$f(x) \to \int^x f(t)\,dt$
hogere orde	ddx, ddy ambigu	eenduidig ($ddx = 0$)

Hoofdstelling bij Leibniz

Acta Eruditorum 1693:

TAB. V. Fig. 2.

Oſtendam autem *problema generale Quadraturarum reduci ad inventionem lineæ datam habentis legem declivitatum*, ſive in qua latera Trianguli characteriſtici aſſignabilis datam inter ſe habeant relationem, deinde oſtendam hanc lineam per motum a nobis excogitatum deſcribi poſſe. Nimirum in omni curva C (C) (*figur. 2*) intelligo *triangulum characteriſticum* duplex: aſſignabile TBC, & inaſſigna-

Ik zal nu laten zien dat het algemene probleem van quadraturen teruggebracht kan worden tot het vinden van een kromme die voorgeschreven hellingen heeft.

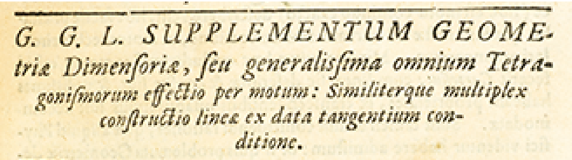
- probleem van quadraturen: $\int_a^b f(x)\,dx$
- kromme: $y = F(x)$
- voorgeschreven hellingen: $F'(x) = f(x)$

Kritiek van Blåsjø

> *. . . this is an anachronistic reading that misses the entire point of the argument completely. When Leibniz' paper is understood in its historical context it becomes evident that it is meant to serve a different purpose altogether. Ironically . . . [the proof] is actually his strategy for what to do when the theorem is of no use (in that one cannot find $F(x)$). [p. 22]*

Wat is hier aan de hand?

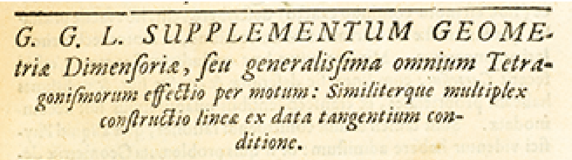
We moeten kijken naar de *context* waarin Leibniz' stelling staat.


G. G. L. SUPPLEMENTUM GEOME-
triæ Dimenſoriæ, ſeu generaliſſima omnium Tetra-
goniſmorum effectio per motum: Similiterque multiplex
conſtructio lineæ ex data tangentium con-
ditione.

- Titel van zijn artikel: *Een algemene constructie voor alle quadraturen door beweging, en evenzo een handige manier om een kromme te construeren met een gegeven raakconditie*

Wat is hier aan de hand?

We moeten kijken naar de *context* waarin Leibniz' stelling staat.

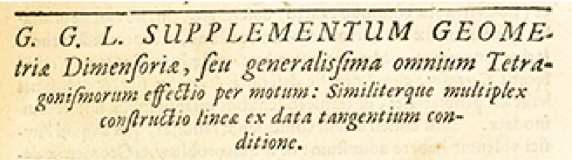


G. G. L. SUPPLEMENTUM GEOMETRIÆ Dimenſoriæ, ſeu generaliſſima omnium Tetragoniſmorum effectio per motum: Similiterque multiplex conſtructio lineæ ex data tangentium conditione.

- Titel van zijn artikel: *Een algemene constructie voor alle quadraturen door beweging, en evenzo een handige manier om een kromme te construeren met een gegeven raakconditie*
- Dus centraal staan: constructie, beweging, krommen

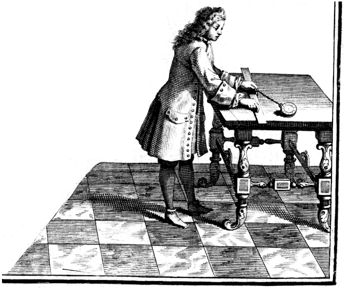
Wat is hier aan de hand?

We moeten kijken naar de *context* waarin Leibniz' stelling staat.


G. G. L. SUPPLEMENTUM GEOME-
triæ Dimenſoriæ, ſeu generalisſima omnium Tetra-
goniſmorum effectio per motum: Similiterque multiplex
conſtructio lineæ ex data tangentium con-
ditione.

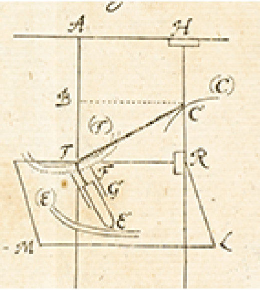
- Titel van zijn artikel: *Een algemene constructie voor alle quadraturen door beweging, en evenzo een handige manier om een kromme te construeren met een gegeven raakconditie*
- Dus centraal staan: constructie, beweging, krommen
- Welhaast bijzaak: verband tussen quadratuur en raaklijn

Waar gaat dit over?



Huygens' tractrix:

$$dx = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{y} dy$$



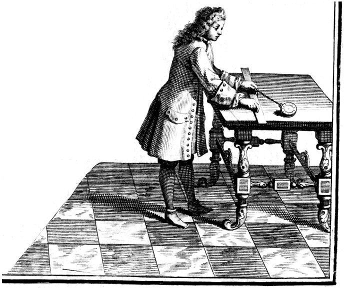
Leibniz' generalisatie:

$\frac{dy}{dx} = f(x)$ oftewel

$y = \int f(x)\, dx$

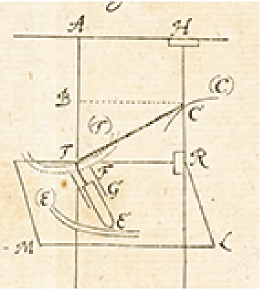
voor gegeven f

Waar gaat dit over?



Huygens' tractrix:

$$dx = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}dy$$



Leibniz' generalisatie:

$\frac{dy}{dx} = f(x)$ oftewel

$y = \int f(x)\,dx$

voor gegeven f

Dit gaat over de legitimatie van (transcendente) krommen.

(En zo'n constructie is zinloos als je een primitieve van f kent!)

Conclusie

- Probeer bij het interpreteren van historische bronnen uit te gaan van de historische context.
- Wees je ervan bewust of en wanneer je je moderne kennis daarbij gebruikt.