# Thuistentamen wisb382 Gesch vd Wisk,

14–22 april 2016

Beantwoord de volgende vragen met behulp van je GvdW-boek (Boyer of anders) en eventueel ook andere bronnen. Vermeld bij je antwoorden welke bron(nen) je hebt gebruikt. Daarbij gaat het er niet om dat je helemaal volgens de regels refereert, maar je moet mij wel in staat stellen om je bronnen na te gaan. Overigens ben je zelf verantwoordelijk voor je antwoorden en kun je je niet zonder meer beroepen op wat willekeurig welke andere auteur beweert. *Kritisch gebruik* van bronnen wordt echter wel gewaardeerd.

Mocht je niet Boyer hebben dan kun je de opdrachten gewoon met je eigen boek maken. Als je er toch liever Boyer bij hebt: de 2e en 3e editie staan beide online.

Bij de beoordeling tellen de volgende aspecten mee:

- kritisch gebruik van de cursusstof (boek, colleges, workshops), je eigen historisch inzicht en eventueel andere bronnen;
- bespreken van ter zake doende punten;
- inhoudelijk goede argumentatie (zowel geschiedkundig als wiskundig);
- toepasselijkheid van aangehaalde bronnen;
- stijl: bondig, concreet, correct; hoogstaand proza hoeft zeker niet maar correct Nederlands moet wel. Een puntenlijstje kan een goed antwoord zijn.

NB: Tentamens moeten individueel gemaakt worden. Bij opvallende overeenkomsten tussen uitwerkingen kan een mondelinge aanvulling vereist zijn en bestaat de kans dat het werk onvoldoende wordt bevonden.

Inleveren op papier, uiterlijk 22/4 17:00.

### Opdrachten

1. Bespreek de verschillen in de cultuur van wiskundebeoefening in de 18e en 19e eeuw. Het gaat hierbij dus *niet* inhoudelijk om de wiskunde maar om de randvoorwaarden: de positie van mensen die wiskunde doen, het soort plaatsen waar zij dat doen, hoe het vakgebied georganiseerd is etc.

**Oplossing:** In ieder geval moet genoemd worden: de veranderende rol van de universiteiten, o.a. als gevolg van de Franse Revolutie (Ecole Polytechnique) en in Duitsland tgv Humboldt, die universiteiten wil omvormen van suffe behoudende kennismusea tot actieve werkplaatsen waar onderzoek en onderwijs gecombineerd wordt. Dit heeft een positieve invloed op de positie van Duitsland als “wiskundeland”; Parijs was in de 18e eeuw ook al sterk. In de 18e eeuw waren het vooral de (meestal Koninklijke) academies van wetenschappen die de beoefening van wiskunde (en aanverwante zaken) aanstuurden.

Verder: wiskunde wordt meer een op zichzelf staand vakgebied (het geheel van de natuurwetenschappen / "natural philosophy" van voorheen valt uiteen in een aantal zelfstandige disciplines). Hierbij horen ook zelfstandige wiskundige genootschappen (als beroepsorganisatie), tijdschriften en (later in de 19e eeuw) congressen.

Door industrialisatie en technische vooruitgang groeit de betekenis van wiskunde voor de maatschappij (denk bijv aan electromagnetisme, telegrafie, thermodynamica). Je ziet hieraan ook dat de wisselwerking met natuurkunde sterk blijft, ook al zijn het nu aparte vakgebieden.

Veel mensen noemden dat er in de 19e eeuw vooral aandacht is voor "toegepaste" wiskunde en maar weinig voor "zuivere" wiskunde. Dat vind ik niet terecht. Toepassingen zijn natuurlijk voor de industrie (lees: geld) belangrijk, maar toch staan de laatste hoofdstukken van Boyer vol met toenemende abstractie en diepe nieuwe inzichten juist op zuiver gebied. Maar dit is eigenlijk wat meer een inhoudelijk punt waar de vraag niet over gaat. Het onderscheid toegepast/zuiver wordt pas in de 19e eeuw gemaakt; dat noemt helaas niemand.

2. Onderzoek wat de belangrijkste drijfveren waren voor de Indiase wiskundigen uit de middeleeuwen. Bijvoorbeeld: hadden ze bepaalde toepassingen voor ogen, of deden ze wiskunde om de wiskunde, of waren er nog andere factoren?

**Oplossing:** Boyer is hierover erg summier, maar als je goed zoekt dan vind je ongeveer het volgende.

In de middeleeuwen in India waren o.a. de Siddhantas (astronomieteksten) belangrijk. Astronomie had een betekenis voor het doen van voorspellingen (astrologie) en had daarnaast ook een religieuze betekenis. Hier ligt een motivatie.

Een andere motivatie was zuivere belangstelling: wiskunde om de wiskunde. Boyer noemt vooral Brahmagupta en Bhaskara (II) en hun werk aan Diophantische problemen. Veel van hun resultaten hadden geen praktisch nut. Deze zuivere belangstelling verschilde wel in een belangrijk opzicht van die van de Grieken, want de axiomatisch-deductieve meetkunde van de laatsten vond in India weinig weerklank.

Verder lijkt wiskunde in nauw verband te staan met grammatica, verzen en soortgelijke cultuuruitingen (de oudste teksten waren in versvorm zodat ze gereciteerd en uit het hoofd geleerd konden worden), zodat er misschien ook een culturele motivatie was om aan wiskunde te doen.

3. Nadat hij Kummers motivatie voor de introductie van algebraïsche idealen heeft toegelicht, merkt Boyer op:

> One of the lessons that the history of mathematics clearly teaches is that the search for solutions to unsolved problems, whether solvable or unsolvable, invariably leads to important discoveries along the way. (Boyer, 2e dr., p. 643).

Beschrijf nog drie andere voorbeelden hiervan, d.w.z.: van belangrijke ontdekkingen in de wiskunde die voortkomen uit drie verschillende problemen (maar *niet* Fermats laatste stelling) uit drie verschillende periodes en/of culturen. Leg in je beschrijving duidelijk uit wat het oorspronkelijke probleem was en, zo goed mogelijk, hoe dat tot een nieuwe ontwikkeling heeft geleid.

**Oplossing:** Let op, er staat in de opdracht dat je een duidelijk probleem moet geven en dat je belangrijke ontwikkelingen moet noemen die daaruit voortkomen. Dat doet helaas niet iedereen. Hier een paar steekwoorden van mogelijke antwoorden (in het tentamen moet dat wel iets verder uitgewerkt):

- Klassiek-Griekse problemen van kubusverdubbeling en/of trisectie: aanleiding tot allerlei interessante krommen (kegelsneden, conchoide, trisectrix) en constructies (neusis), samenhangend met de vraag "wat is construeerbaar?").
- Al dan niet bewijsbaarheid van het parallellenpostulaat, wat na eeuwen geleid heeft tot vormen van niet-Euclidische meetkunde en daarmee de relatie tussen wiskunde en werkelijkheid heeft veranderd.
- Pappusprobleem, aanleiding voor Descartes en Fermat om analytische meetkunde te ontwikkelen.
- Problemen bij gokspelen in de 17e eeuw, waardoor Fermat en Pascal begonnen aan kansrekening.
- Omvangrijk rekenwerk van astronomen(16e/17e eeuw) met boldriehoeken heeft geleid tot de uitvinding van logaritme, die inmiddels om andere redenen van fundamenteel belang is.
- Hamiltons introductie van quaternionen als antwoord op de vraag naar een algebra voor de ruimte, met als consequentie o.a. vectoren en de noodzaak om niet-commutatieve producten te accepteren.
- Cardano's probleem van de *casus irreducibilis*, met als uitvloeisel complexe getallen en functietheorie.

- Galoistheorie als antwoord op de vraag welke polynoomvergelijkingen oplosbaar zijn in radicalen.
- Poincaré's aanvankelijk foutieve werk aan het drielichamenprobleem, wat een belangrijke impuls heeft gegeven aan zowel topologie als chaostheorie.
- Sommigen noemen de irrationaliteit van $\sqrt{2}$ maar de directe gevolgen daarvan, zoals de verhoudingentheorie van Eudoxus en de strikte scheiding van meetkunde en rekenkunde in de Griekse wiskunde, kwam ik bij niemand tegen.
- Het Baselprobleem, aanleiding voor de zetafunctie, het Riemannvermoeden en kennis van de verdeling van priemgetallen.
- **Slechte** voorbeelden zijn er ook gegeven: het Koningsbergenprobleem kun je wel zien als een vroege voorloper van grafentheorie maar het heeft zeker niet gefungeerd als beginpunt ervan, en Copernicus' heliocentrisch wereldbeeld heeft voor de wiskunde geen directe gevolgen gehad.

4. Boyer behandelt bij Ptolemaeus diens *half-angle formula*, zie bijgaande scan. Vul de details van het bewijs aan. Boyer bezondigt zich aan een licht anachronisme: leg uit welk, en verklaar waarom het adjectief "licht" hier op zijn plaats is. Leg tenslotte nog uit waarom het hebben van dit resultaat voor Ptolemaeus belangrijk is.

It was the formula for sine of the difference—or, more accurately, chord of the difference—that Ptolemy found especially useful in building up his tables. Another formula that served him effectively was the equivalent of our half-angle formula. Given the chord of an arc in a circle, Ptolemy found the chord of half the arc as follows. Let $D$ be the midpoint of arc $BC$ in a circle with diameter $AC = 2r$ (Fig. 10.9), let $AB = AE$, and let $DF$ bisect $EC$

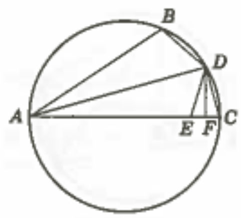



FIG. 10.9

(perpendicularly). Then it is not difficult to show that $FC = \frac{1}{2}(2r - AB)$. But from elementary geometry it is known that $DC^2 = AC \cdot FC$, from which it follows that $DC^2 = r(2r - AB)$. If we let arc $BC = 2\alpha$, then $DC = 2r \sin \alpha/2$ and $AB = 2r \cos \alpha$; hence we have the familiar modern formula $\sin \alpha/2 = \sqrt{(1 - \cos \alpha)/2}$. In other words, if the chord of any arc is known, the chord of half the arc is also known. Now Ptolemy was equipped to build up a table of chords as accurate as might be desired, for he had the equivalent of our fundamental formulas.

**Oplossing:** Bewijs afmaken: Allereerst moeten we laten zien dat $F$ *zowel* het midden van$EC$ is, en *ook* het voetpunt van de loodlijn uit $D$. Dit is alleen zo als $\triangle CDE$ gelijkbenig is. Welnu, $E$ is zo gekozen dat $AE = AB$, en omdat $D$ het midden van boog $BC$ is geldt dat $\triangle ABD$ en $\triangle AED$ congruent zijn. Dus $BD = DE$, maar ook $BD = DC$, dus $DE = DC$ zodat $\triangle CDE$ inderdaad gelijkbenig is.

Nu is het inderdaad makkelijk om de uitdrukking voor $FC$ te vinden: $FC = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}(AC - AE) = \frac{1}{2}(2r - AB)$.

Het volgende resultaat: $DC^2 = AC \cdot FC$, volgt uit de gelijkvormigheid van $\triangle ADC$ en $\triangle DFC$ en uitvermenigvuldigen van de verhoudingen $FC : DC = DC : AC$.

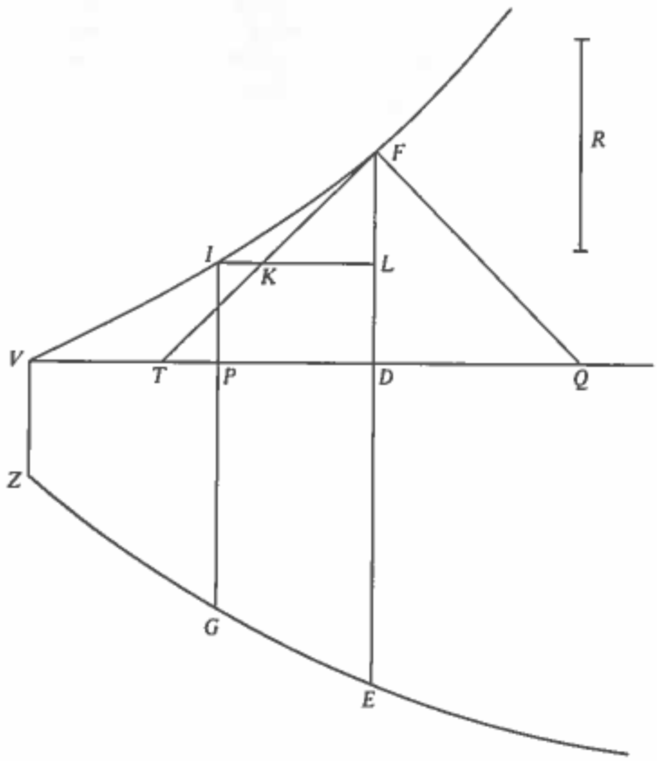
Nu de gonio: $DC$ is koorde onder een boog $\alpha$ en dus $2\times$ zo lang als de sinus (als klassiek lijnstuk, niet als moderne verhouding!) van boog $\frac{\alpha}{2}$, oftewel $DC = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$. Je kunt dit ook zien met de $\triangle ADC$, rechthoekig in $D$ en met $\angle A = \frac{\alpha}{2}$, zodat $DC = AC \sin A = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$. Tot slot, $AB$ is rechthoekszijde in $\triangle ABC$ met $\angle A = \alpha$ dus $AB = 2r \cos \alpha$. De rest is invulwerk.

Anachronisme: Ptolemaeus gebruikt koorden, Boyer sinus (en cosinus). Sinus is afkomstig uit de latere Indiase wiskunde. Dit is niet erg omdat de twee concepten heel dicht bij elkaar liggen: de sinus van boog $\alpha$ is de halve koorde van boog $2\alpha$. Hierdoor kun je makkelijk overstappen van sinus op koorde of andersom, zonder de geschiedenis veel geweld aan te doen.

Waarom belangrijk: Ptolemaeus wilde een koordentabel maken. Uitgaande van de bekende eigenschappen van regelmatige 4-, 5- en 6-hoeken, en de verschilformule, kan hij de koorden van een aantal hoeken berekenen; deze hoeken zijn echter allemaal veelvouden van 3°. Met de hier behandelde halveringsformule kan hij hieruit de koorde van $\frac{3}{2}^\circ$ en $\frac{3}{4}^\circ$ berekenen en daarna de koorde van 1° interpoleren. Dat is in feite de basis voor de hele tabel.

5. Hieronder staan twee tekstfragmenten: een (bijna letterlijke) vertaling van een passage bij Barrow, en een moderne interpretatie daarvan. Geef een kritische evaluatie van de moderne weergave in relatie tot het origineel.

Let $ZGE$ be any curve of which the axis is $VD$ and let there be perpendicular ordinates to this axis ($VZ, PG, DE$) continually increasing from the initial ordinate $VZ$; also let $VIF$ be a line such that, if any straight line $EDF$ is drawn perpendicular to $VD$, cutting the curves in the points $E$, $F$, and $VD$ in $D$, the rectangle contained by $DF$ and a given length $R$ is equal to the intercepted space $VDEZ$; also let $DE{:}DF = R{:}DT$, and join [$T$ and $F$]. Then $TF$ will touch the curve $VIF$. For, if any point $I$ is taken in the line $VIF$ (first on the side of $F$ towards $V$), and if through it $IG$ is drawn parallel to $VZ$, and $IL$ is parallel to $VD$, cutting the given lines as shown in the figure; then $LF{:}LK = DF{:}DT = DE{:}R$, or $R \times LF = LK \times DE$.




But, from the stated nature of the lines $DF, LK$, we have $R \times LF =$ area $PDEG$: therefore $LK \times DE =$ area $PDEG < DP \times DE$; hence $LK < DP < LI$.

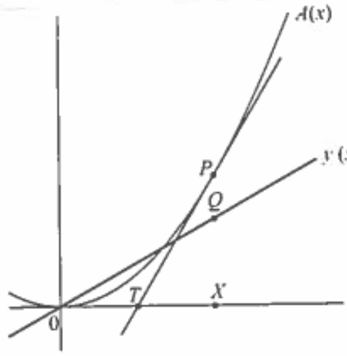
Again, if the point $I$ is taken on the other side of $F$, and the same construction is made as before, plainly it can be easily shown that $LK > DP > LI$.

From which it is quite clear that the whole of the line $TKF$ lies within or below the curve $VIFI$.

Other things remaining the same, if the ordinates, $VZ, PG, DE$, continually decrease, the same conclusion is attained by similar argument; only one distinction occurs, namely, in this case, contrary to the other, the curve $VIF$ is concave to the axis $VD$.

### 19.2.2 Barrow's theorem

Isaac Barrow (1630–1677) was a well known theologian and mathematician. He was a professor of mathematics at Cambridge University, where his most famous pupil was Isaac Newton. Barrow's theorem, which can be found in his *Lectiones Geometricae* (London, 1670) is re-phrased below. For simplicity we will assume that the curve $y(x)$, given in the theorem, passes through the origin, and that all of the points mentioned in the theorem lie either on the $x$-axis or in the first quadrant. The figure given below may be useful when reading the theorem.




**Barrow's Theorem** [5]: Suppose that at any point $X = (x, 0)$ on the $x$-axis, $A(x)$ gives the area of the region enclosed by the curve $y(x)$, the $x$-axis, and the vertical line containing the point $X$; $Q$ is the point on the curve $y(x)$ directly above $X$; and $P$ is the point on the curve $A(x)$ directly above $X$. If $T$ is chosen on the $x$-axis so that the length of $\overline{TX}$ times the length of $\overline{XQ}$ equals the length of $\overline{XP}$, then the line $\overleftrightarrow{TP}$ is tangent to the curve $A(x)$ at point $P$.

If the hypothesis of Barrow's theorem is met, then $T$ is the point on the $x$-axis such that

$$|\overline{TX}| \cdot |\overline{XQ}| = |\overline{XP}|.$$

Simply rearranging the previous equality yields

$$|\overline{XQ}| = \frac{|\overline{XP}|}{|\overline{TX}|}.$$

and thus

$$y(x) = |\overline{XQ}| = \frac{|\overline{XP}|}{|\overline{TX}|} = \text{the slope of the line } \overleftrightarrow{TP}.$$

Barrow concludes $\overleftrightarrow{TP}$ is tangent to $A(x)$, the area curve, at the point $P$. If we are willing to impose our modern notion of the derivative onto Barrow's statement of his theorem, we see Barrow is claiming that

$$A'(x) = \text{the slope of the line } \overleftrightarrow{TP} = y(x),$$

where $A(x)$ is the area function for $y(x)$. Therefore, if we view Barrow's theorem in light of our modern day notions of the derivative, we might conclude that this theorem is a geometric statement of the fundamental theorem of calculus.

**Oplossing:** We maken eerst een vergelijking van een aantal belangrijke elementen uit de twee teksten.

| **Barrow** | **moderne interpretatie** |
|---|---|
| kromme $ZGE$ gegeven | kromme $y(x)$ (door de oorsprong) |
| as $VD$ met toenemende ordinaten $VZ, PG$ etc. | rechthoekige coordinaten $x$, $y$ met $x \geq 0$, $y \geq 0$ |
| kromme $VIF$ heeft eigenschap: product van zijn ordinaten met $R =$ opp onder kromme $ZGE$ | kromme $A(x) =$ opp onder de kromme $y(x)$ |
| NB: door product met $R$ is de vgl. homogeen | homogeniteit niet nodig |
| kies $T$ op as zo dat $DE : DF = R : DT$ | kies $T$ op $x$-as zo dat $TX \cdot XQ = XP$ |
| **Bewering**: $TF$ is raaklijn aan $VIF$ | **Bewering**: $TP$ is raaklijn aan kromme $A(x)$ |
| Kies willekeurig punt $I$ op $VIF$, links van $F$. Trek ordinaat $IG$ en trek $IL \parallel VD$. Zij $K$ het snijpunt van $IL$ met $TF$. Dan geldt $LF : FK = DF : DT = DE : R$ oftewel $R \cdot LF = LD \cdot DE$. Maar $R \cdot LF =$ opp $PDEG$. Dus $LK \cdot DE =$ opp $PDEG < PD \cdot DE$ en blijkbaar ligt $K$ dus strikt tussen $I$ en $L$. | Uit de eis op $T$ volgt $y(x) = XQ = \frac{XP}{TX} =$ helling van lijn $TP$ |
| Een analoog argument is te geven voor keuze van $I$ rechts van $F$ op de kromme | |
| Concludeer dat al die punten $K$ op lijn $LF$ (op $F$ na) allemaal rechts van de kromme $VIF$ liggen. De hele lijn $LF$ ligt dus aan een zijde van de kromme, op precies één punt $F$ na, dus $LF$ is raaklijn, QED. | "Barrow concludes $TP$ is tangent to $A(x)$" wat we modern kunnen interpreteren als: $A'(x) =$ helling van $TP = y(x)$ met $A(x)$ nu de opp-*functie* (was: *kromme*). |
| Analoog verhaal kan ook voor een afnemende kromme $ZG$ gegeven worden. | |

In de moderne interpretatie is dus het oorspronkelijke klassiek-meetkundige begrippenapparaat vervangen door een modern cartesisch asenstelsel en een notatie voor "krommen" die eerder doet denken aan "functies", en ook in die zin gebruikt wordt aan het eind. Het volledige meetkundige bewijs van Barrow is weggelaten, en er is niet bewezen dat $TP$ raaklijn is aan $A(x)$.

Barrows resultaat is geïnterpreteerd als (een deel van) de hoofdstelling van de integraalrekening. Dat is op zich een redelijke interpretatie. Alleen, door het weglaten van de meetkunde verdwijnt behalve het bewijs van de bewering ook de essentie van Barrows stuk. De moderne interpretatie van het resultaat is bovendien beslist niet zoals Barrow dat zelf zag. Barrow was juist een bewonderaar van de klassieke Griekse meetkundigen en de hier gebruikte tekst staat dan ook in zijn *Meetkundelessen*.

Noot (dit valt buiten de tentamenopdracht): de moderne weergave is van Vicky Williams Klima, hst. 19 in *Mathematical Time Capsules* onder redactie van Dick Jardine en Amy Shell-Gellasch, MAA 2011. Het boek is een bundeling van losse projecten die geschiedenis gebruiken bij het wiskunde-onderwijs. Het onderhavige project bevat o.a. nog een worksheet gebaseerd op de herinterpretatie van Barrows tekst, gevolgd door een discussie-opdracht over de stelling dat Barrow een meetkundige versie van de hoofdstelling van de integraalrekening heeft en dus geëerd moet worden als een grondlegger ervan. Ik vind dat je die discussie niet kunt voeren op grond van een versie die zo ver van het origineel af staat en waaraan het bewijs ontbreekt.