De conservatieve gravitatiekracht.

Plusopgave

22.12.2016

In deze plusopgave gaan we aan de slag met het gravitatieveld rondom een puntmassa, een vectorveld als gevolg van de gravitatiekracht die een massa (bijvoorbeeld een planeet) uitoefent op andere objecten (zoals we gezien hebben bij de wetten van Kepler).

a) Herinner je van de opgaven over Kepler dat massa's elkaar aantrekken met een kracht die omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand tussen deze twee massa's. Laat zien dat het gravitatieveld rondom een puntmassa m in een punt $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ gegeven wordt door

$$\vec{F} = -\frac{km}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}(\vec{r} - \vec{r}_0), \tag{0.1}$$

met $k > 0$ een scalair die afhangt van de massa van het object wat zich in dit gravitatieveld bevindt.

b) Bereken de veldlijnen behorende bij dit gravitatieveld, en schets deze. Als je niet meer hoe dat moet, kijk dan in paragraaf 15.1 van het boek, waar staat dat de veldlijnen moeten voldoen aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{dx}{F_1(x,y,z)} = \frac{dy}{F_2(x,y,z)} = \frac{dz}{F_3(x,y,z)} \tag{0.2}$$

(let op: F_i zijn de componenent van het vectorveld $\vec{F}$, niet partiële afgeleiden).

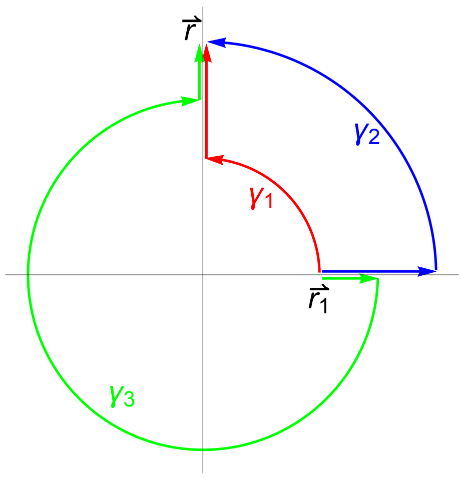
De arbeid die het gravitatieveld uitoefent wanneer een object in dit gravitatieveld over een kromme γ beweegt, wordt gegeven door de lijnintegraal $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Deze arbeid staat gelijk aan de verandering in potentiële energie. In de volgende onderdelen gaan we onderzoeken of de uitkomst van deze lijnintegraal afhangt van de precieze keuze van de kromme γ, met andere woorden: is het zwaartekrachtsveld is conservatief?

c) De set vergelijkingen

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \tag{0.3}$$

vormen een noodzakelijke voorwaarde voor een vectorveld $\vec{F}$ om conservatief te zijn.[1] Laat zien dat dit geldt voor het gravitatieveld $\vec{F}$.

d) Neem nu voor het gemak aan dat $\vec{r}_0 = (0,0,0)$. We nemen nu twee andere punten, $\vec{r}$ en $\vec{r}_1$ en beschouwen een aantal krommen γ_i die deze 2 punten verbinden (opmerking: hoewel ons systeem 3D is, hebben we voor het gemak de coordinaten zo gekozen dat $\vec{r}$ en $\vec{r}_1$ in het xy-vlak liggen).



Bewijs dat $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Betekent dit dat $\vec{F}$ conservatief is?

e) Kies één van deze paden en definieer $U(\vec{r}, \vec{r}_1) \equiv \int_{\gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Is dit altijd een zinnige definitie? Bereken ook $U(\vec{r}_1, \vec{r}_1)$ en leg uit wat dit betekent.

f) Stel nu dat het referentiepunt $\vec{r}_1$ heel ver weg ligt, oftewel: we nemen de limiet $|\vec{r}_1| \to \infty$. Noem de functie die je dan krijgt $U(\vec{r})$. Check dat geldt $U(\vec{r}) = \tilde{U}(|\vec{r}|)$, dat wil zeggen: U hangt alleen van de norm van $\vec{r}$ af. Deze functie U noemen we de *zwaartekrachtspotentiaal*.

g) Bereken tenslotte $-\nabla U$. Wat is je conclusie over het gravitatieveld $\vec{F}$? En wat is je conclusie over de mogelijk zinloze definitie van $U(\vec{r}, \vec{r}_1)$ in vraag e)?

[1] Deze vergelijkingen betekenen dat de rotatie van het vectorveld nul is, maar dat leer je later in het vak.