De Laplace-operator in poolcoördinaten

Plusopgave

08.12.2016

In deze plusopgave bekijken we de vorm van de Laplaciaan in poolcoordinaten, die we kunnen verkrijgen uit Laplaciaan in Cartesische coordinaten door herhaaldelijk toepassen van de kettingregel. Eerst een sommetje om warm te worden.

a) Laat zien dat de functie $f(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ harmonisch is, d.w.z. $\Delta f(x,y) = 0$.

Nu gaan we door met poolcoordinaten, $x = x(r,\theta) = r\cos\theta$ en $y = y(r,\theta) = r\sin\theta$ (dat wil zeggen: we kunnen x en y opvatten als functies van r en θ).

b) Laat zien dat $x^2+y^2 = r^2$ en $y/x = \tan\theta$.

c) Differentieer $x^2+y^2 = r^2$ naar x en vind $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$. Vind op eenzelfde manier uitdrukkingen voor $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$ en $\frac{\partial \theta}{\partial y}$.

d) Laat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een functie zijn van twee variabelen. De kettingregel vertelt ons dat

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}. \tag{0.1}$$

Druk $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ uit in $\frac{\partial f}{\partial r}$ en $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ en eenvoudige functies van r en θ.

e) Berekenen nu de tweede partiële afgeleiden $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. *Hint: de tweede afgeleide is de afgeleide van de afgeleide, dus gebruik d).*

f) Tel je antwoorden bij e) bij elkaar op, en laat zien dat

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}. \tag{0.2}$$

g) Laat zien dat we ook kunnen schrijven:

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}. \tag{0.3}$$

h) Stel nu dat gegeven is dat f harmonisch is en axiaal symmetrisch: f is niet afhankelijk van θ. Vind een algemene oplossing voor f. Vergelijk je antwoord met vraag a).