Pauli-Matrices

Plusopgave

24.11.2016

In deze plus opgave gaan we kijken naar het volgende groepje 2×2 matrices:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{0.1}$$

In de Quantum Mechanica zijn deze matrices zo belangrijk dat ze een speciale naam hebben gekregen: de *Pauli matrices.* Deze matrices zijn met name van belang wanneer we ons bezig gaan houden met de spin van een electron, maar voor nu gaan we alleen even oefenen met de matrices en vergeten we de spin.

We beginnen met een stukje notatie. Voor twee $(m \times m)$ matrices A en B definiëren we de *commutator*:

$$[A, B] = AB - BA, \tag{0.2}$$

en de *anticommutator*:

$$\{A, B\} = AB + BA. \tag{0.3}$$

a) Toon de volgende eigenschappen aan van de commutator:

$$[A, A] = 0 \text{ (de nulmatrix)}, \quad [A, B] = -[B, A], \quad [A + B, C] = [A, C] + [B, C]. \tag{0.4}$$

Nu richten we ons op de (2×2) Pauli matrices.

b) Laat het volgende zien:

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z. \tag{0.5}$$

c) Bereken ook $[\sigma_y, \sigma_z]$ en $[\sigma_x, \sigma_z]$. Wat valt je op?

We zien dus dat deze matrices aan elkaar gerelateerd kunnen worden door de commutator te nemen, zulke relaties heten *commutatie-relaties.* Naast dat de Pauli-matrices bijzondere commutatierelaties hebben, hebben ze ook bijzondere *anticommutatie-relaties.*

d) Bereken de anticommutator voor alle mogelijke mogelijke combinaties van σ_x, σ_y en σ_z.

Nog een algemene regel voor commutatoren tussendoor, we kunnen namelijk ook de commutator nemen met een product van matrices:

e) Bewijs de volgende relatie:

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]. \tag{0.6}$$

f) Gebruik een aantal van de bovenstaande relaties om $[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2, \sigma_z]$ uit te rekenen (zonder expliciet een enkel matrixproduct uit te rekenen!).

g) Nu een alternatieve route: bereken expliciet $\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$ en vervolgens $[\sigma^2, \sigma_z]$.

Stel nu dat er een vector $\vec{v} = (\alpha, \beta)^T$ en een scalair λ bestaan zodat $\sigma_z \vec{v} = \lambda \vec{v}$.

h) Bereken $\sigma_z^2 \vec{v}$. Welke waarden kan λ daarom hebben? Noem deze twee mogelijkheden λ_+ en λ_-.

i) Vind vectoren $\vec{v}_+$ en $\vec{v}_-$ waarvoor geldt dat $\sigma_z \vec{v}_\pm = \lambda_\pm \vec{v}_\pm$ en $|v|^2 = |\alpha_\pm|^2 + |\beta_\pm|^2 = 1$.

j) Bereken $\sigma^2 \vec{v}_\pm$. Bestaan er ook scalairen $\mu_\pm$ zodat $\sigma^2 \vec{v}_\pm = \mu_\pm \vec{v}_\pm$?

Achtergrond: De twee vectoren $\vec{v}_\pm$ die je hierboven hebt gevonden heten *eigenvectoren* en de getallen $\lambda_\pm$ *eigenwaarden* van de matrix σ_z. Dit gaan we over een paar weken leren, maar je kunt er nu voor de 2×2 matrices alvast een beetje aan wennen.

Natuurkundige achtergrond: in quantum mechanica houdt men o.a. zich bezig met *spin* van bijvoorbeeld een electron, een grootheid vergelijkbaar met het impulsmoment van een draaiend bolletje (maar dan quantum). De Pauli-matrices zijn gerelateerd aan de spin in de x, y en z -richting. Het blijkt zo te zijn dat, omdat de Pauli matrices niet commuteren, we niet de *tegelijkertijd* de spin in de x, y en de z richting kunnen weten, dit maakt quantum mechanica een onzekere business (maar dat zie je volgend jaar wel). Overigens kunnen we dus wel het kwadraat van de totale spin (σ^2) en de spin in de z-richting tegelijkertijd weten, die commuteren immers wel!