

# Tentamen WISN101 Wiskundige Technieken

Ma 5 nov 2012 15:00 – 18:00

## Aanwijzingen

- Motiveer alle antwoorden.
- Werk rustig, netjes en duidelijk. Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van electronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- **Let op je tijd!** Totaal 68 punten, ca. 10m/4pt.

· ◁ ◦ ((({ Succes! }))) ◦ ▷ ·

1. (4pt) In  $\mathbb{R}^3$  zijn gegeven de vectoren  $\mathbf{p} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$  en  $\mathbf{r} = 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ ; laat  $P$  en  $R$  de eindpunten van deze vectoren zijn. Bepaal alle punten  $Q$  op de  $x$ -as (dus met plaatsvector  $\mathbf{q} = q\mathbf{i}$ ) waarvoor geldt dat  $\angle PQR$  recht is.

2.

- (4pt) Bepaal alle (complexe) oplossingen van  $z^3 - 8 = 0$ ; geef antwoord(en) naar keuze in carthesische notatie of in poolnotatie.
- (4pt) Leid de verschilformules af voor  $\cos(x - y)$  en  $\sin(x - y)$  met behulp van de complexe e-macht.

3. Het 4e-orde Taylorpolynoom van  $\log(1 + x)$  met steunpunt 0 is

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4.$$

- (4pt) Ga dat na met de Taylorformule en geef een uitdrukking voor de restterm (Lagrange remainder).
- (4pt) Maak hiermee een (rationale) benadering van  $\log \frac{1}{2}$ , en geef een bovengrens voor de benaderingsfout.

(Terzijde: in dit geval is de benadering ongeveer  $20\times$  zo goed als de bovengrens van de restterm doet vermoeden.)

4. (10pt) Onderzoek de functie  $f(x) = \log \frac{2x}{(x-4)^2}$  en schets de grafiek.

NB je hoeft geen scheve of kromme asymptoten te onderzoeken.

5. Beschouw de kromme die voor  $-\infty < t < \infty$  geparametriseerd is door

$$x = t^3 - kt,$$

$$y = \frac{1}{t^2 + 1}.$$

- a. (4pt) Voor  $k > 0$  snijdt de kromme de  $y$ -as 3 keer, in 2 verschillende punten. Toon dit aan.
- b. (4pt) Toon aan dat er voor  $k = 0$  een keerpunt (spits) optreedt.

6. Bereken de volgende integralen.

a. (4pt)  $\int e^{-x} \sin(2x) dx$

b. (4pt)  $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$

7. (4pt) Bereken het boloppervlak dat verkregen wordt door de grafiek van  $y = \sqrt{1 - x^2}$  te wentelen rond de  $x$ -as. (Er wordt dus expliciet gevraagd naar de berekening en niet naar een wellicht bekend feit).

8. We definiëren voor  $x > 1$  de functie  $f(x) = \frac{\log x}{x^2 - 1}$  en voor  $x \geq 1$  de functie  $g(x) = \sqrt{x} - \log x$ .

- a. (4pt) Onderzoek of  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  bestaat; indien ja, bereken de limiet; indien nee, geef reden.
- b. (4pt) Bepaal alle extremen van  $g(x)$  en laat zien dat  $g(x) > 0$  voor  $x \geq 1$ .
- c. (4pt) Toon aan dat  $\int_1^\infty f(x) dx$  convergent is.

Hint:  $c = a + b +$  beetje prutsen.

9. (6pt) De overgebleven macaroni is op kamertemperatuur ( $T_0 = 22^\circ\text{C}$ ) en gaat de diepvries in, die constant op  $T_v = -18^\circ\text{C}$  gehouden wordt. Na 8 minuten is de macaroni afgekoeld tot  $12^\circ\text{C}$ . Gebruik de differentiaalvergelijking

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_v)$$

met randwaarden om te berekenen na hoeveel minuten de macaroni bevriest. (Je eindantwoord komt niet uit op een net getal en hoeft ook niet numeriek benaderd te worden.)